

חלק 4 - תרגיל 4

שאלה 1. יהי D חוג עם חילוק, יהי $R = M_n(D)$ ויהי M ה- R -מודול הימני $M_{\text{mod}}(D)$.

לכל $0 \leq i \leq m$ נגדיר

$$M_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\}_i^i \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\}_{m-i}^{m-i}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

בהיכנסה של ה-11.4.2021 אמרתי ש- $\{M_i\}_{i=0}^m$ היא סדרה חריבה של M .
השאלה אחר הפרטק של ההוכחה. כלומר, הראו כי $M_m, \dots, M_0$ הם גזע-מודולים של M ו- M/M_i הוא ה- R -מודול בטור לכל $0 \leq i \leq m$.

שאלה 2. יהי $R = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & C \end{bmatrix}$. מצאו סדרה חריבה של R -מודולים ו- R -מודול R . מה האורך של R ושל R_R ?

שאלה 3. יהיו M ו- N ה- R -מודולים.

(א) יהי $f: M \rightarrow N$ איזומורפיזם ויהיו $M_1 \leq M_2 \leq M$. הוכיחו כי $\frac{f(M_2)}{f(M_1)} \cong \frac{f(M_2)}{f(M_1)}$.

(ב) נניח כי M מאריך סופי ו- $M \cong N$. הוכיחו כי N הוא מאריך סופי ו- $l(M) = l(N)$.

שאלה 4. יהיו M, N ה- R -מודולים מאריך סופי. הוכיחו כי $l(M \times N) = l(M) + l(N)$.

שאלה 5. יהי M ה- R -מודול מאריך סופי ויהי $N \leq M$. הוכיחו כי $l(N) \leq l(M)$ ויש שוויון אם ורק אם $N = M$.

שאלה 6. יהיו M, N ה- R -מודולים ויהיו $M_1 \leq M, N_1 \leq N$ גזע-מודולים קטנים.

(א) נניח כי M ו- N מאריך סופי. הראו כי $M \cong N$ ו- $M_1 \cong N_1 \iff M/M_1 \cong N/N_1$.
(כאז: משפט ז'ורדן-הולדר)

(ב) מצאו דוגמה למחזק R עם מודולים M_1, M_2, N_1, N_2 כך ש- $M \cong N$ ו- $M_1 \cong N_1$ אבל $M/M_1 \not\cong N/N_1$. (הצעה: קחו $R = \mathbb{Z}$).